Ferdowsi Civil Engineering, 36, 4, 2024. (1-18)

Ferdowsi University of Mashhad

Ferdowsi Civil Engineering

https://civil-ferdowsi.um.ac.ir

Iranian Concrete Institute

Pavement Engineering Association of Iran

Application of Differential Transform Method for Solving the Free Surface Seepage Problem of One-Dimensional Porous Media

Research Article

Mohammad Saleh Baradaran[1], Ahmad Aftabi Sani[2], Saeed Abrishami[3]

DOI: 10.22067/jfcei.2024.82170.1226

1- Introduction

In order to determine the location of free surface seepage, various methods, such as analytical solutions, empirical and approximate formulas, or numerical approaches through flow network simulations, are employed. Analytical methods for solving seepage in porous media are based on solving the governing differential equation with simplifying assumptions. While these assumptions are acceptable under specific conditions, the applicability of analytical methods is limited to problems with specific geometries and boundary conditions.

Numerical methods, including Finite Difference Method (FDM), Finite Element Method (FEM), and Finite Volume Method (FVM), are also utilized to determine the location of free surface seepage. The FDM for instance, discretizes the Laplace equation, transforming it into a system of linear algebraic equations. The domain is divided into a rectangular grid, with nodes at the corners representing the head values. Boundary conditions with specified head values are applied, while unknown head values at other nodes are estimated. Iterative techniques, such as the relaxation method, are often employed, requiring multiple iterations until convergence.

The FEM, another numerical approach, divides the flow domain into discrete elements and generates a system of equations for each element. Material properties and boundary conditions are specified for each element, and the system of equations is solved to obtain head values at nodes. This method is advantageous for complex seepage problems, allowing for the accurate modeling of intricate geometries and high-gradient areas by adjusting the element sizes.

To address the issue of unknown free surface locations, a conventional approach involves using an approximate free surface and refining it through trial and error. The Boundary Integral Equation Method is also employed to write equations for discrete points on the free surface. These equations, relying solely on boundary information, allow for determining the free surface location without solving the entire problem. This method proves useful when accurate solutions are only needed at specific points or sections.

In summary, the discussed analytical and numerical methods provide diverse approaches for analyzing seepage problems. Each method has its advantages and limitations, making them suitable for different scenarios based on different factors, such as geometry, boundary conditions, and the need for precise solutions at specific locations.

2-Materials and Methods

2-1- Differential Transform Method (DTM)

DTM is a semi-analytical numerical approach for solving functional equations. Zhou first introduced this method in 1986 for engineering applications, particularly in the analysis of linear and nonlinear initial value problems in electrical circuit analysis.

DTM utilizes the Taylor series expansion to represent the solution of various equations in the form of a power series. In the Taylor series method, calculating coefficients requires obtaining various derivatives of the function at a specific point, a task that becomes increasingly challenging at higher orders. DTM involves a recursive process to obtain the Taylor series solution of the assumed equation. However, unlike other methods, derivatives are not directly calculated; instead, a recursive process is employed for computation. Consequently, this approach significantly reduces the computational workload associated with higher-order derivatives. One-dimensional DTM, like other mathematical topics, consists of some theorems that solve equations based on these theorems. Some of the most used one-dimensional theorems of this method are shown in Table 1.

*Manuscript received April 29, 2023, Revised November 4, 2023, Accepted February 5, 2024.

[1] M.Sc., Department of civil engineering, Engineering Faculty, Islamic Azad University of Mashhad, Mashhad, Iran.

2 Corresponding author.Assistant Professor, Department of civil engineering, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. **Email**: aftabi@um.ac.ir

3 Assistant Professor, Department of civil engineering, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran. **Email**: s.abrishami@um.ac.ir

Table 1. Commonly used one-dimensional DTM theorems

Main function	Differential transformed function
$w(x)=u(x)\pm v(x)$	$W(k)=U(k)\pm V(k)$
$w(x)=u(x)v(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}U(r)V(k-r)$
$w(x)=\lambda u(x)$	$W(k)=\lambda U(k)$, $\lambda=$constant
$w(x)=x^m$	$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1 & k=m\\ 0 & k\neq m\end{cases}$
$w(x)=\frac{d\,u(x)}{dx}$	$W(k)=(k+1)U(k+1)$
$w(x)=\frac{d^2u(x)}{dx^2}$	$W(k)=(k+2)(k+1)U(k+2)$
$w(x)=\frac{d^r u(x)}{dx^r}$	$W(k)=(k+1)(k+2)...(k+r)U(k+r)$

2-2- One-dimensional Column of Porous Medium and Water with Free Surface

Figure 1 shows the pressure head distributed in the water column with height when the pressure at the top and bottom of the water column is known and the lower part of the water column contains a porous medium:

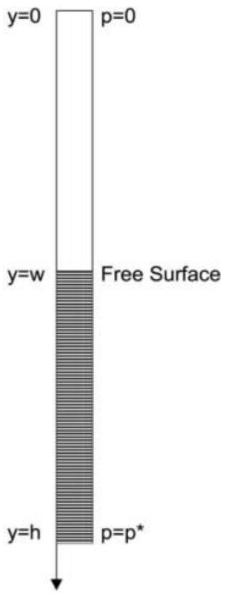


Figure 1: One-dimensional Water Column with Undefined Free Surface [9]

The problem of Figure 1 according to the research of Bardet and Tobita is expressed as follows (Eq. 1):

$$\begin{cases}\frac{d^2p}{dy^2}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{dp}{dy}=0 & p\leq\varepsilon\\ \frac{d^2p}{dy^2}=0 & p>\varepsilon\end{cases}\tag{1}$$

Moreover, the boundary conditions of the problem are (Eq. 2):

$$\begin{aligned}&p=0 \quad \text{at} \quad y=0\\ &p=p^* \quad \text{at} \quad y=h\end{aligned}\tag{2}$$

The physical (Eq. 3) and analytical (Eq. 4) solutions to the above problem are described as follows in the previous research.

$$\begin{cases}p=0 & y\leq h-p^*\\ p=p^*+y-h & y>h-p^*\end{cases}\tag{3}$$

$$\frac{d}{\varepsilon}-\frac{h}{\varepsilon}=(1-\frac{P^*}{\varepsilon})(1-e^{\frac{-d}{\varepsilon}})\tag{4}$$

In the next section, we will discuss the solution to the above problem using DTM. Next, we will show that the results of the above method will be in very good agreement with the results of the analytical method.

2-3- Solution by Differential Transform Method (DTM)

According to the definition of the DTM in equation (4), for the pressure values in the upper and lower part (porous medium). respectively, we will have:

$$\begin{aligned}&p_1(y)=P_1(0)+P_1(1)y+P_1(2)y^2+\cdots\\ &p_2(y)=P_2(0)+P_2(1)y+P_2(2)y^2+\cdots\end{aligned}\tag{5}$$

Now, in order to solve the problem in equation (5) using DTM, a differential transform must be taken from the above two equations. Starting from the second rule ($p>\varepsilon$) of Eq. (1) and according to the relations defined in Table 1, we have the equation by deriving it twice:

$$(k+2)(k+1)P_2(k+2)=0\tag{6}$$

By placing different values of k and considering that a constant number is multiplied by different values of P_2, we can conclude that it is $P_2(2)=P_2(3)=...=P_2(n)=0$ and only two unknowns, $P_2(0)=P_2(1)$, remain. Therefore, according to the definition, the expansion of the second rule can be written as follows:

$$P_2(y)=P_2(0)+P_2(1)y\tag{7}$$

Similarly, according to the equations in Table 1, for the first rule of Eq. (1), we will have the same process as before:

$$P_1(y)=P_1(0)+P_1(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{\varepsilon^{k-1}k!}\tag{8}$$

So far, it has been determined that the solution of the above problem with DTM depends on four unknowns

$P_1(0), P_1(1), P_2(0), P_2(1)$, which will be obtained with four boundary conditions according to Figure (1). First, apply the two upper and lower boundary conditions of the water column, Eq. (2), and after applying the upper boundary condition $y=0$, $P_1(0)=0$ will be obtained and by applying the lower boundary condition, $y=h$ in the porous medium, $P_2(0)=P^*-P_2(1)h$ will be obtained. By applying the boundary condition at the intersection of water and porous medium, which expresses the equality of the two equations, P_1 and P_2, at the height of the free surface d with the value of ε , and also knowing that at the intersection of water and porous medium, the condition of flow continuity is established, we will reach the following result:

$$P_2(1)=P_1(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{\varepsilon^k\,k!} \tag{9}$$

Now, by placing the obtained values, simplifying and arranging them, in general, for different pressure values, it can be written that:

$$\begin{cases} p_1(y)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k\,k!}-1\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{\varepsilon^{k-1}\,k!} & , \; p\le\varepsilon \\ p_2(y)=P^*-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k\,k!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k\,k!}-1\right)^{-1}\left[h+y\right] & , \; p>\varepsilon \end{cases} \tag{10}$$

Therefore, DTM could also achieve the exact solution of the problem, equation (4). It should be noted that the above solution is performed for the first time by DTM.

3. Results and Discussion

Knowing how to solve the problem analytically and physically and the extended pressure method, for a water column with a height of 10 m, a maximum pressure of 5 m, and a pressure head of 0.5 m, we will compare the results of the above methods with DTM according to Table 2:

According to the values obtained from Table 2, DTM has an acceptable accuracy compared to other methods and the analytical method. As can be seen from Figures 2 and 3, the solution by EP, analytical, and DTM methods shows the region of smooth transition between the porous and dry surface and the wet surface, if this transition is broken in the solution by physical method. Therefore, the solution to the above two methods does not show the exact location of the free surface of the leak like solving by physical method. It can also be stated that with the increase of the epsilon value, the answers of the differential transformation method and the analytical solution match each other.

Table 2. Comparison of the results obtained for one-dimensional water column pressure at a certain height by different methods

y (m)	P (m)		Error vs analytical method	
	EP	**DTM**	**EP**	**DTM**
0	0	0	0	0
0.5	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1.5	0	0	0	0
2	0	0	0	0
2.5	10	0	0	0
3	20	30	-01	0
3.5	60	90	-03	0
4	0.019	0.025	-05	0
4.5	0.056	0.067	-0.011	0
5	0.167	0.184	-016	0
5.5	0.5	0.5	0	0
6	1	1	0	0
6.5	1.5	1.5	0	0
7	2	2	0	0
7.5	2.5	2.5	0	0
8	3	3	0	0
8.5	3.5	3.5	0	0
9	4	4	0	0
9.5	4.5	4.5	0	0
10	5	5	0	0

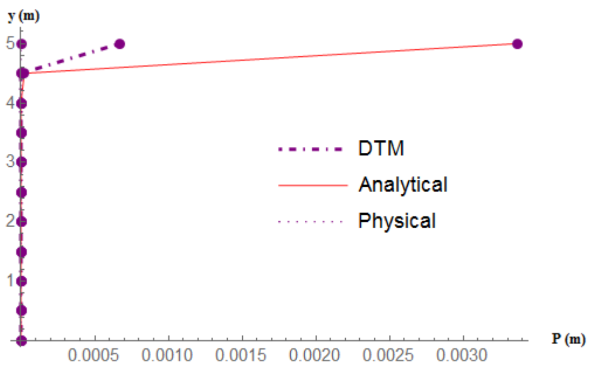


Figure 2. Comparison of the results obtained from the physical, analytical, and DTM methods in the one-dimensional water column with ε =0.1

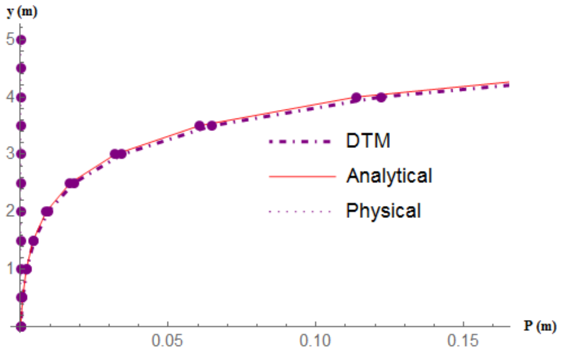


Figure 3. Comparison of the results obtained from the physical, analytical, and DTM methods in the one-dimensional water column with ε =0.8

4 - Conclusion

In the present study, an attempt was made to solve the problem of the seepage of free surface in a one-dimensional column of water including a porous medium, whose governing equation is Laplace's equation, by DTM. The results were compared with other existing methods, such as physical solution and solution to the EP method. Some of the findings obtained from the current research are as follows:

- Solving by the DTM method can produce answers very close to the solution of EP methods and analytical solution, and these results, especially in the upper water column, are much more accurate than solving by the physical method.
- DTM solution, which is based on the expansion of the Taylor series of functions, has a smaller amount of calculations than the EP method and the analytical method, which is an advantage to prevent the occurrence of calculation errors in the prolongation of the complex calculation process.
- The EP and DTM methods, as well as the analytical method, have a smooth transition zone between the dry and porous environment and the wet environment, which in the case of the physical method, is a broken and sudden zone.

مهندسی عمران فردوسی، ۳۷، ۱، ۱۴۰۳. (۱۸-۱)

مهندسی عمران فردوسی

https://civil-ferdowsi.um.ac.ir/

انجمن مهندسی روسازی ایران

انجمن بتن ایران

کاربرد روش تبدیل دیفرانسیلی در تعیین سطح آزاد نشت محیط متخلخل یک‌بعدی*

مقاله پژوهشی

محمدصالح برادران [۱] احمد آفتابی ثانی [۲] سعید ابریشمی [۳]

DOI: 10.22067/jfcei.2024.82170.1226

چکیده تاکنون روش‌های عددی متنوعی مانند تفاضلات محدود، حجم محدود و اجزای محدود برای حل مسئله سطح آزادِ نشت، در محیط یک‌بُعدی و دوبُعدی، به کار رفته است. معادله ریاضی حاکم بر مسئله نشت در محیط متخلخل، معادله لاپلاس می‌باشد. روش‌های تفاضلات محدود و اجزای محدود، بر پایه شبکه‌بندی سطح مورد نظر و به دست آوردن مقادیر هد در این سطح، و تکرار این روند تا رسیدن به همگرایی مورد نظر، مبتنی هستند. در این مقاله، مسأله سطح آزاد نشت در ستون آب یک‌بعدی، برای اولین بار با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی که روشی است مبتنی بر سری تیلور، با در نظر گرفتن شرایط مرزی موجود، حل گردیده است. نتایج حاصل از روش جدید، با پاسخ‌های روش تفاضل محدود و حل تحلیلی مسئله که در بخش پیوست قرار دارد، مقایسه گردیده و تطابق خوبی مشاهده می‌شود. همچنین با توجه به نتایج می‌توان بیان داشت که حل به روش تبدیل دیفرانسیلی از حجم محاسبات کمتری نسبت به روش فشار گسترده و روش تحلیلی برخوردار است و این امر، از بروز اشتباهات محاسباتی و خطاهای عددی و همچنین، طولانی شدن روند محاسبات پیچیده جلوگیری می‌کند.

واژه‌های کلیدی روش تبدیل دیفرانسیلی، محیط متخلخل، معادله لاپلاس، سطح آزاد نشت، روش فشار گسترده.

Application of Differential Transform Method for Solving Free-Surface Seepage Problem of One-Dimensional Porous Media

Mohammad Saleh Baradaran Ahmad Aftabi Sani Saeed Abrishami

Abstract *Several numerical methods, such as finite difference, finite volume, finite element, and so on, have been utilized to solve the problem of the free surface seepage in one-dimensional and two-dimensional domains. The governing equation of the seepage problem in porous media is the well-known Laplace equation. The finite difference and finite element methods are based on meshing the desired surface and obtaining the head values at this level; and repeating this process until convergence is reached. In this paper, a new method is proposed to solve the one-dimensional free-surface seepage problem in one-dimensional water column based on the Taylor-series expansion, entitled Differential Transform Method (DTM). It should be mentioned, up to now, DTM is employed to solve the various form of differential equations, but it has not been used in seepage problems. For some verification purposes, the obtained results are compared with the well-known finite difference method, and the good agreement is observed. Moreover, the analytical solution of the problem is attained by the use of mathematical techniques and it is reported in the paper as an appendix. Also, according to the results, it can be said that the DTM solution is more stable than the extended pressure and the analytical methods, and this prevents the occurrence of calculation errors in the lengthening of the calculation process.*

Key words Differential transform method, Porous media, Laplace equation, Free surface seepage, Extended pressure method.

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۲/۰۲/۰۹ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۲/۱۱/۱۶ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد، گرایش آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد

(۲) استادیار گروه مهندسی عمران، گرایش آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد **Email**: aftabi@um.ac.ir

(۳) استادیار گروه مهندسی عمران، گرایش ژئوتکنیک، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

به طور کلی به منظور تعیین محل سطح آزاد نشت از روش‌های مختلفی مانند راه‌حل‌ها، فرمول‌های تقریبی و تجربی و یا حل از طریق رسم شبکه جریان استفاده می‌گردد. روش‌های تحلیلی حل تراوش در محیط‌های متخلخل مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از فرضیات ساده‌کننده می‌باشد. این فرضیات در شرایط خاص قابل قبول هستند و لذا دامنه کاربرد روش‌های تحلیلی محدود به مسائل با هندسه خاص و شرایط مرزی خاص می‌شود.

همچنین می‌توان از روش‌های مختلف عددی نظیر روش تفاضل‌های محدود، روش اجزای محدود و روش حجم‌های محدود نیز در تعیین محل سطح آزاد نشت بهره گرفت. برای تحلیل نشت، یک مدل کلی که پدیده نشت را توصیف کند، بایستی در دسترس باشد. در صورت داشتن شرایط مرزی و خصوصیات خاک، این مدل می‌تواند برای تعیین هد و توزیع جریان و مقدار نشت به کار رود. معادله لاپلاس برای روش‌های مختلف در آنالیز نشت، مبنای ریاضی محسوب می‌شود.

روش تفاضلات محدود، معادله لاپلاس را با منقطع کردن این معادلات به یک سری معادلات جبری خطی حل می‌نماید. ناحیه و حوضه جریان به یک شبکه مستطیلی با گره‌هایی در گوشه‌ها تقسیم شده، که این المان‌های مستطیلی، نشان‌دهنده یک هد می‌باشند. در نقاط یا در طول مرزهایی که هد ثابتی دارند مقادیر هد مشخص بوده، اما برای گره‌هایی که مقادیر اولیه برای هد نداریم، مقدار هد باید تخمین زده شود. با استفاده از قانون دارسی و این فرض که هد در هر گره مقدار میانگین گره‌های اطراف می‌باشد، N معادله جبری خطی با N هد مجهول به دست می‌آید که N برابر تعداد گره‌ها می‌باشد [1]. یک شبکه ساده با تعداد گره‌های محدود با دست قابل حل می‌باشد، اما معمولا N مقدار بزرگی دارد و روش‌های دیگری مانند Relaxation بایستی به کار رود [2]. معادلات گسسته سازی شده با روش تکراری حل می‌شود و این تکرار تا زمانی ادامه می‌یابد که تغییرات در هد برای هر گره از میزان تلورانس انتخابی کمتر شود [3-4]. فرایند Relaxation [5] یک روش عددی است که با موفقیت [6] برای تعیین راه‌حل‌های تقریبی مسائل پیچیده جریان به کار گرفته شده، که بر اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال تفاضل‌های متناهی پایه‌گذاری شده است. در این روش شبکه‌بندی حوضه جریان به شکل یک شبکه مربعی با فواصل مساوی می‌باشد [7].

روش اجزای محدود، دومین راه‌حل عددی می‌باشد. این روش نیز بر اساس شبکه‌بندی استوار است (البته نه ضرورتا شبکه مستطیلی) که حوضه جریان را به المان‌های گسسته تقسیم می‌کند و N معادله با N مجهول ایجاد می‌کند. خصوصیات مواد مانند نفوذپذیری، برای هر المان مشخص و همچنین شرایط مرزی از قبیل هد و سرعت جریان نیز تعیین می‌شود. برای محاسبه هد در هر گره و جریان در المان‌ها بایستی یک دستگاه معادلات حل شود. روش اجزای محدود نسبت به روش تفاضلات محدود برای مسائل نشت پیچیده‌تر، دارای فوایدی است از جمله اینکه هندسه پیچیده شامل لایه‌های مورب از مواد به سادگی قابل مدل کردن می‌باشد و با تغییر دادن اندازه المان‌ها، در مناطقی که گرادیان نشت یا سرعت بالاست، مدل دقیق‌تری می‌توان ایجاد کرد [8-20].

از آنجا که قسمتی از مقادیر مرزی بایستی در سطح به کار روند، حل مسئله بدون داشتن اطلاعاتی در مورد موقعیت سطح آزاد امکان‌پذیر نمی‌باشد. به عبارت دیگر موقعیت سطح آزاد نشت قسمتی از حل مسئله می‌باشد. راه حل مرسوم این است که مقادیر مرزی را با استفاده از یک سطح آزاد تقریبی به کار برده و سپس با استفاده از سعی و خطا اقدام به حل کامل مسئله می‌کنیم و محل سطح آزاد را در هر سعی و خطا بهبود می‌بخشیم [21,22]. روش معادله انتگرال مرزی برای نوشتن معادلات برای نقاط گسسته روی سطح آزاد به کار می‌رود. این معادلات تنها به اطلاعات مرزها بستگی پیدا می‌کنند و بنابراین موقعیت سطح آزاد را بدون حل کامل مسئله می‌توان تعیین کرد. در ضمن نتایج معادلات جبری موقعیت سطح آزاد را کاملا توصیف کرده و هیچ سعی و خطایی نیاز نمی‌باشد به غیر از موقعیتی که معادلات غیرخطی باشند. این روش مخصوصا زمانی مفید واقع می‌شود که حل در تعداد محدودی از نقاط یا تنها قسمتی از حل مورد نظر باشد. از آنجا که این روش تنها اطلاعات مرزها را استفاده می‌کند، یک مزیت مهم برای مسائلی است که نیازمند تعیین موقعیت سطح آزاد می‌باشند [23-25]. زمانی که ضریب هدایت هیدرولیکی در هر ناحیه از جریان متفاوت باشد، روش معادله انتگرال مرزی می‌تواند برای هر ناحیه به کار برده شود و سپس ناحیه‌ها را با استفاده از معادلات سازگار به هم مرتبط ساخت یا با هم ترکیب نمود [26].

روش تبدیل دیفرانسیلی اولین بار توسط ژو (Zhou) [27] برای تحلیل و بررسی مدارهای الکتریکی در حالت یک بعدی ارائه گردید. سپس شینگ هویی و چن کوانگ (Chen, C. o. K., & Ho, S. H) [28] روش تبدیل دیفرانسیلی را برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک تیر یکنواخت، بر روی پی غیر همگن، که تحت بار محوری کششی و بار عرضی قرار دارد، استفاده کردند. همچنین شینگ هویی و چن کوانگ روش تبدیل دیفرانسیلی را برای حالت دوبعدی گسترش داده و با ارائه چند قضیه ساده از آن، به اثبات آن‌ها پرداختند [29]. در ادامه، فاطما ایاز (Fatma Ayaz) به بیان روش تبدیل دیفرانسیلی دوبعدی پرداخته و با ارائه تعدادی از قضیه‌های این تبدیل، به اثبات آن‌ها پرداخت. وی با به‌کارگیری این روش، در حل تعدادی مسئله و مقایسه جواب آن‌ها با جواب دقیق، نحوه دقت روش را مورد صحت‌سنجی قرار داد همچنین با استفاده از قضای‌ای تبدیل دیفرانسیل دوبعدی، سیستم‌های شامل دو معادله دیفرانسیل و دو مجهول را حل کرده و با مقایسه جواب‌های به دست آمده از روش‌های دیگر، توانایی روش تبدیل دیفرانسیلی در حل این گونه مسائل را نیز نشان داد [31-30].

مواد و روش‌ها

روش تبدیل دیفرانسیلی (Differential Transform Method) یک بعدی

در این قسمت، روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) در حالت یک بعدی به طور مختصر شرح داده خواهد شد. روش تبدیل دیفرانسیلی، روشی نیمه تحلیلی- عددی برای حل معادلات تابعی است. این روش اولین بار توسط ژو [27] در سال ۱۹۸۶ برای کاربردهای مهندسی معرفی گردید و از آن برای حل مسائل مقدار اولیه خطی و غیر خطی در تحلیل مدارهای الکتریکی استفاده شد.

روش تبدیل دیفرانسیلی از بسط سری تیلور برای جواب انواع معادلات به صورت یک چندجمله‌ای استفاده می‌کند. در روش سری تیلور، برای محاسبه ضرایب سری، باید مشتقات مختلف تابع را در یک نقطه معین به دست آورد، که این محاسبات در مراتب بالاتر بسیار سخت‌تر خواهد بود. روش تبدیل دیفرانسیلی یک فرایند تکراری برای به دست آوردن جواب سری تیلور معادله مفروض است، اما در این روش، مشتقات به طور مستقیم محاسبه نمی‌شوند، بلکه برای محاسبه مشتقات از یک فرایند تکراری استفاده می‌شود. به همین دلیل، در این روش، حجم محاسبات بسیار کاهش خواهد یافت. در این قسمت، نخست برای آشنایی با روش تبدیل دیفرانسیلی، مبانی آن را به طور خلاصه شرح داده و سپس پاره‌ای از قضیه‌های روش تبدیل دیفرانسیلی یک‌بعدی، نشان داده خواهد شد.

تابع یک متغیره $u(x)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $u(x)$ در دامنه D تعریف شده و نقطه معین x_0 در این دامنه قرار داشته با شد. در این حالت $u(x)$ به صورت یک سری تیلور به مرکز x_0 نمایش داده می‌شود:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (۱)$$

ضریب پشت جمله $(x - x_0)^k$ بسط مک لورن را تبدیل دیفرانسیلی تابع $u(x)$ می‌نامند و با $U(k)$ نمایش می‌دهند:

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}u(x)\right]_{x=x_0} ; k \geq 0 \qquad (۲)$$

که در آن $u(x)$ تابع ا صلی و $U(k)$ تبدیل دیفراذ سیلی تابع $u(x)$ است. $U(k)$ ، در واقع، دنباله‌ای از اعداد حقیقی است.

تبدیل دیفرانسیلی معکوس دنباله $\{U(k)\}_{k=0}^{\infty}$ برابر است با:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)\,(x - x_0)^k \qquad (۳)$$

وقتی که $x_0 = 0$ باشد، آن‌گاه تابع فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)\,x^k \qquad (۴)$$

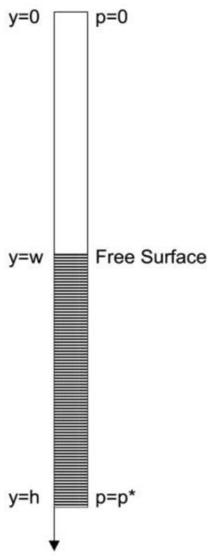
تبدیل دیفراذ سیلی یک بعدی همانند دیگر مباحث ریا ضی، از تعدادی ق ضیه ت شکیل شده ا ست که حل معادلات بر مبنای این قضایا صورت می‌گیرد. در ادامه، تعدادی از پرکاربردترین ق ضیه‌های این روش در ف ضای یک‌بعدی در جدول (۱) نمایش داده شده است.

جدول ۱ برخی از قضایای روش تبدیل دیفرانسیلی [31]

تابع اصلی	تابع تبدیل یافته دیفرانسیلی
$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^{k} U(r)V(k-r)$
$w(x) = \lambda u(x)$	$W(k) = \lambda U(k), \lambda = \text{constant}$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 k = m \\ 0 k \neq m \end{cases}$
$w(x) = \frac{du(x)}{dx}$	$W(k) = (k+1)U(k+1)$
$w(x) = \frac{d^2u(x)}{dx^2}$	$W(k) = (k+2)(k+1)U(k+2)$
$w(x) = \frac{d^ru(x)}{dx^r}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+r)$
$w(x) = e^{\lambda x}$	$W(k) = \frac{\lambda^k}{k!}; k = \text{constant}$

ستون یک‌بعدی با سطح آزاد

همان طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، هد فشاری p توزیع شده در ستون آب با ارتفاع h، زمانی که فشار p در بالا و پایین ستون آب، معین و قسمت تحتانی ستون آب شامل محیطی متخلخل می‌باشد، نشان داده شده است:



شکل ۱ ستون آب یک‌بعدی با سطح آزاد نامشخص [32]

مسئله شکل (۱) که هدف از طرح آن، یافتن سطح آزاد نشت و یا به عبارتی سطح ایستابی در آن است، به صورت زیر مطابق با پژوهش بردت و توبیتا [32]، بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \frac{d^2p}{dy^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{dp}{dy} = 0 p \leq \varepsilon \\ \frac{d^2p}{dy^2} = 0 p > \varepsilon \end{cases} \quad (۵)$$

همان طور که می‌بینیم، مسئله فوق شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه دو بوده و لذا به چهار شرط مرزی نیاز دارد:

$$\begin{matrix} p = 0 at y = 0 \\ p = p^* at y = h \end{matrix} \quad (۶)$$

شروط مرزی بیان شده، شامل فشار صفر در سطح بالا و مجاورت هوای آزاد و فشار معین انتهایی ستون آب بوده و دو شرط دیگر، شروط پیوستگی در محل تلاقی محیط متخلخل و آب می‌باشند.

با فرض اینکه مختصات y رو به پایین و $h > p^*$ بوده، حل بدیهی فیزیکی مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} p = 0 y \leq h - p^* \\ p = p^* + y - h y > h - p^* \end{cases} \quad (۷)$$

در بخش‌های بعد، به بیان حل به روش تبدیل دیفرانسیلی مسئله فوق می‌پردازیم. سپس نشان خواهیم داد نتایج روش فوق در تعامل بسیار خوبی با نتایج روش تحلیلی خواهد بود.

حل مسئله به روش تبدیل دیفرانسیلی

طبق تعریف روش تبدیل دیفرانسیلی در رابطه (۴)، برای مقادیر

p_1, p_2 که به ترتیب فشار در قسمت فوقانی و تحتانی (محیط متخلخل) هستند خواهیم داشت که:

$$\begin{aligned} p_1(y) &= P_1(0) + P_1(1)y + P_1(2)y^2 + \cdots \\ p_2(y) &= P_2(0) + P_2(1)y + P_2(2)y^2 + \cdots \end{aligned} \tag{۸}$$

باید دقت کرد که در روابط (۸)، $p_1(y), p_2(y)$ که در سمت چپ معادلات هستند، p کوچک بوده که نشان دهنده توابع اصلی و مقادیر $P_1(0),\ldots,P_2(0),\ldots$ در سمت راست معادلات، با p بزرگ نوشته می‌شوند که نشان دهنده تبدیل یافته دیفرانسیلی تابع اصلی هستند. حال برای حل معادلات مسئله در رابطه (۵) با استفاده از DTM، باید از دو معادله فوق تبدیل دیفرانسیلی گرفته شود. از ضابطه دوم $(p > \varepsilon)$ شروع کرده و طبق روابط تعریف شده در جدول (۱)، با دو بار مشتق‌گیری از رابطه برحسب y داریم:

$$(k+2)(k+1)P_2(k+2) = 0 \tag{۹}$$

با جای‌گذاری مقادیر مختلف k می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} k &= 0 \;\rightarrow\; 2P_2(2) = 0 \\ k &= 1 \;\rightarrow\; 6P_2(3) = 0 \\ k &= 2 \;\rightarrow\; 12P_2(4) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با مشاهده روند فوق و با توجه به این موضوع که عددی ثابت در مقادیر مختلف P_2 ضرب می‌شوند، می‌توان نتیجه گرفت که $P_2(2)=P_2(3)=P_2(4)=\ldots=P_2(n)=0$ بوده و تنها دو مجهول $P_2(0)=P_2(1)$ باقی می‌مانند. پس طبق تعریف، می‌توان بسط ضابطه دوم را به صورت زیر نوشت:

$$P_2(y) = P_2(0) + P_2(1)y \tag{۱۱}$$

به طور مشابه، با توجه به روابط موجود در جدول (۱)، برای مشتق اول و دوم نسبت به y، با گرفتن تبدیل دیفرانسیلی از معادله اول و ترکیب آن‌ها، تبدیل یافته دیفرانسیلی در $p \le \varepsilon$ معادله (۵)، خواهیم داشت:

$$(k+2)(k+1)P_1(k+2) = \frac{1}{\varepsilon}(k+1)P_1(k+1) \tag{۱۲}$$

همانند قبل با جای‌گذاری مقادیر مختلف k در معادله فوق، می‌توان مقادیر مختلف $P_1(y)$ را به دست آورد و نوشت:

$$\begin{aligned} k &= 0 \rightarrow P_1(2) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}P_1(1) \\ k &= 1 \rightarrow P_1(3) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{3}P_1(2) = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{2\times 3}P_1(1) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{3!}P_1(1) \\ k &= 2 \rightarrow P_1(4) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{4}P_1(3) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3}\cdot\frac{1}{2\times 3\times 4}P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon^3}\cdot\frac{1}{4!}P_1(1) \\ k &= 3 \rightarrow P_1(5) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{5}P_1(4) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4}\cdot\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5}P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon^4}\cdot\frac{1}{5!}P_1(1) \end{aligned} \tag{۱۳}$$

با مشاهده روند فوق و ارتباط بین هر کدام از مقادیر $P_1(k)$ به مقادیر قبل از خود، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$P_1(k) = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\cdot\frac{1}{k!}P_1(1) \tag{۱۴}$$

بسط تابع مجهول (رابطه ۸) برای قسمت اول آن را می‌توان به صورت باز شده زیر بازنویسی کرد:

$$P_1(y) = P_1(0) + P_1(1)y + P_1(2)y^2 + \cdots + P_1(k)y^k \tag{۱۵}$$

و یا با توجه به رابطه به دست آمده در (۱۴) می‌توان به صورت خلاصه نوشت:

$$P_1(y) = P_1(0) + P_1(1)y + P_1(1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\cdot\frac{1}{k!}y^k \tag{۱۶}$$

با به کارگیری قضایای ریاضی در مورد سیگما در رابطه (۱۵)، ابتدا مقدار $P_1(1)y$ را به داخل سیگما برده و سپس یک واحد از مقدار پایه آن سیگما کم کرده و می‌توانیم بنویسیم:

$$P_1(y) = P_1(0) + P_1(1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{\varepsilon^{k-1}k!} \tag{۱۷}$$

تا اینجا مشخص شد که حل مسئله فوق با DTM به چهار مجهول $P_1(0), P_1(1), P_2(0), P_2(1)$ وابسته است که این چهار مجهول با چهار شرط مرزی طبق شکل (۱) به دست خواهند آمد.

لازم به ذکر است که روابط به دست آمده در (۹) و (۱۲) به رابطه بازگشتی (Recursive Formula) در روش تبدیل دیفرانسیلی معروف هستند که نشان‌دهنده ارتباط میان تابع اصلی و مقادیر به دست آمده تبدیل دیفرانسیلی در آن تابع حول نقطه

مذکور می‌باشند. روابط بازگشتی در روش تبدیل دیفرانسیلی از اهمیت بالایی برخوردار هستند چون به دست آوردن آن‌ها با توجه به اینکه روش بر پایه بسط تیلور توابع است؛ یعنی رسیدن به پاسخ نهایی مسئله (البته پس از اعمال شرایط مرزی).

حال به سراغ اعمال شرایط مرزی برای یافتن مجهولات معادلات فوق، با درنظرگرفتن این موضوع که شرط $P_1(y)$ در قسمت فوقانی ستون آب و شرط $P_2(y)$ در قسمت پایینی آن اعمال شود، می‌رویم.

ابتدا دو شرط مرزی بالایی و پایینی ستون آب ـ رابطه (۶)ـ را اعمال کرده و پس از اعمال شرط مرزی بالایی در $y = 0$، $P_1(0) = 0$ به دست آمده و با اعمال شرط مرزی پایینی در $y = h$ که در محیط متخلخل موجود است، $P_2(0) = P^* - P_2(1)h$ به دست خواهد آمد.

حال به اعمال شرط مرزی در محل مشترک آب و محیط متخلخل که بیان کننده برابر بودن دو رابطه P_1, P_2 در ارتفاع سطح آزاد d با مقدار ε است، پرداخته و خواهیم داشت:

$$P_1(d) = P_2(d) = \varepsilon \qquad (۱۸)$$

با استفاده از رابطه (۱۱) در ارتفاع d می‌توان نوشت:

$$P_2(d) = P_2(0) + P_2(1)d = \varepsilon \qquad (۱۹)$$

از مراحل قبل می‌دانیم که $P_2(0) = P^* - P_2(1)h$ است. بنابراین با جای‌گذاری این عبارت در رابطه (۱۹) و خلاصه‌نویسی، می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$P^* - P_2(1)(h - d) = \varepsilon \qquad (۲۰)$$

همانند قبل، با استفاده از مقدار به دست آمده $P_1(0) = 0$ از اعمال شرط مرزی و قرار دادن آن در رابطه (۱۷) در ارتفاع d خواهیم داشت:

$$P_1(d) = P_1(1)\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k}{\varepsilon^{k-1} k!}\right] = \varepsilon \qquad (۲۱)$$

همچنین با دانستن این موضوع که در محل مشترک آب و محیط متخلخل، شرط پیوستگی جریان نیز باید برقرار باشد، به نتیجه زیر خواهیم رسید:

$$y = d\ , P = \varepsilon \ \Rightarrow\ \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial P_2}{\partial y} \qquad (۲۲)$$

با استفاده از روابط به دست آمده در (۱۱) و (۱۷) برای $P_1(y), P_2(y)$ و مشتق‌گیری مرتبه اول نسبت به y طبق رابطه (۲۲) از آن‌ها، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = P_2(1); \frac{\partial P_1}{\partial y} = P_1(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} \qquad (۲۳)$$

با نتایج به دست آمده از رابطه فوق (۲۳) و اعمال شرط پیوستگی (رابطه ۲۲) در محل مشترک آب و محیط متخلخل، می‌توان نوشت:

$$P_2(1) = P_1(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} \qquad (۲۴)$$

در ادامه، برای نشان دادن این امر که حل DTM به همان حل دقیق ارائه شده در بخش حل تحلیلی منجر شود، روابط بین مجهولات این دو حل را روشن می‌سازیم. با اندکی تأمل می‌توان دریافت که عملا $P_1(0) = c_1 + c_2$ و همچنین $P_2(0) = c_4 , P_2(1) = c_3$ هستند:

$$\begin{cases} P_1(0) = c_1 + c_2 \\ \varepsilon P_1(1) = c_2 \ \rightarrow\ P_1(1) = \dfrac{1}{\varepsilon} c_2 \end{cases} \qquad (۲۵)$$

با توجه به اینکه $P_1(0) = 0$ می‌باشد، $c_1 = -c_2$ به دست خواهد آمد. حال با استفاده از رابطه $P_2(0) = P^* - P_2(1)h$ که از قبل به دست آمده و قرار دادن ضرایب تعریف شده c_3, c_4 در آن، رابطه $c_4 = P^* - c_3 h$ نتیجه خواهد شد. با جای‌گذاری مقادیر $P_2(1) = c_3, P_1(1) = \frac{1}{\varepsilon} c_2$ در رابطه (۲۴) می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$c_3 = c_2 \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} \qquad (۲۶)$$

با قرار دادن مقادیر به دست آمده برای $P_2(1), P_2(0)$ برحسب ضرایب c_3, c_4، در رابطه (۱۹) و فاکتورگیری از عامل مشترک و ساده‌سازی آن، می‌توان نوشت:

$$P_1(1)(d - h) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} = \varepsilon - P^* \qquad (۲۷)$$

هم‌چنین از شرط مرزی مشترک آب و محیط متخلخل که از یک سو منجر به رابطه (۲۱) شد، پس از ساده‌سازی داریم:

$$P_1(1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\varepsilon^k k!} - 1\right)^{-1} =$$

$$-\frac{1}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{y}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{720}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{-1 + e^{y/\varepsilon}} \qquad (۲۸)$$

حال با جای‌گذاری رابطه به دست آمده برای $P_1(1)$ از روابط بیان شده، به صورت کلی برای مقادیر مختلف فشار می‌توان

نوشت که:

$$\begin{cases} p_1(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k k!} - 1\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{\varepsilon^{k-1}k!}\,p \le \varepsilon \\ p_2(y) = P^* - \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k k!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k k!} - 1\right)^{-1}\right]h + \\ \qquad \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k k!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^k}{\varepsilon^k k!} - 1\right)^{-1}\right]yp > \varepsilon \end{cases} \tag{۲۹}$$

بنابراین، روش تبدیل دیفرانسیلی نیز توانست به حل دقیق مسئله (رابطه ۴۵) که در پیوست به صورت کامل ارائه شده است، دست یابد. لازم به ذکر است که، حل فوق برای نخستین بار است که به روش تبدیل دیفرانسیلی انجام می‌شود. با توجه به شکل (۱) و معلوم بودن مقادیر h, ε, p^* طبق فرض مسئله، پس از جای‌گذاری در رابطه (۲۸)، محل سطح آزاد نشت در ارتفاع d از بالای ستون یک‌بعدی آب شکل (۱)، به دست خواهد آمد.

نتایج و بحث

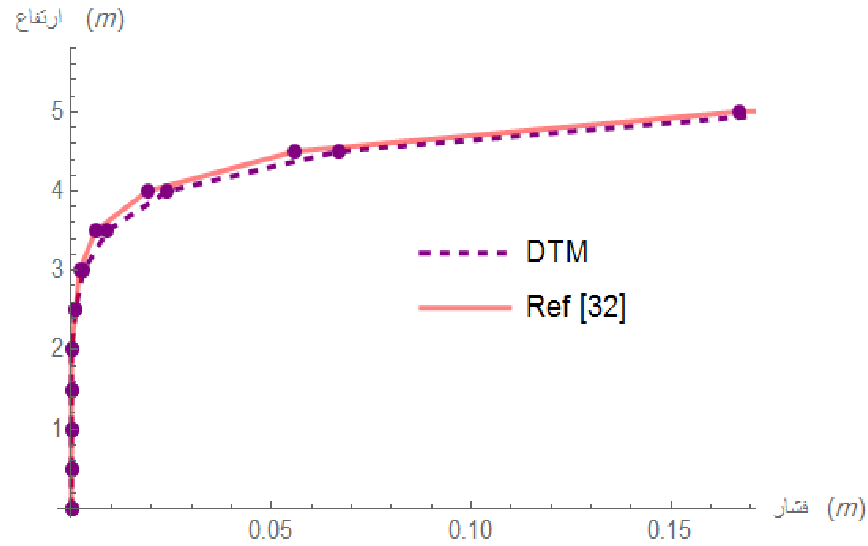
با توجه به حل فوق و جای‌گذاری موارد به دست آمده، می‌توان حل DTM مسئله را به صورت زیر بازنویسی کرد:

با دانستن حل مسئله به صورت تحلیلی، فیزیکی [32] و روش فشار گسترده (Extended Pressure) [32]، برای ستونی آب به ارتفاع $h = 10m$ و فشار حداکثر $P^* = 5m$ و هد فشاری پایه $\varepsilon = 0.5m$، به مقایسه نتایج حاصل از روش‌های فوق با روش تبدیل دیفرانسیلی (رابطه ۲۹) مطابق جدول (۲) می‌پردازیم:

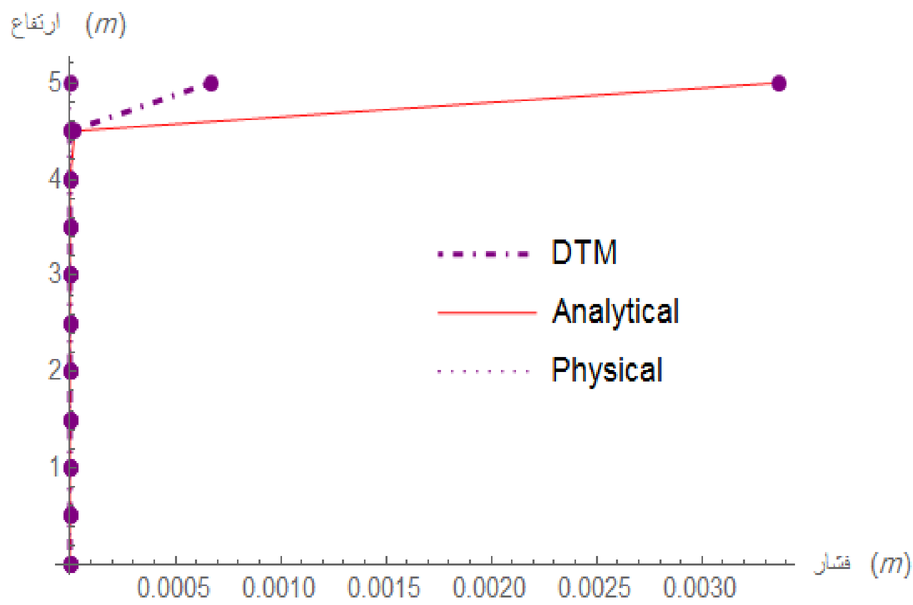
جدول ۲ مقایسه نتایج به دست آمده برای فشار ستون آب یک‌بعدی در ارتفاع مشخص به روش‌های مختلف

ارتفاع y (m)	فشار P (m)				مقدار خطا نسبت به روش تحلیلی	
	حل فیزیکی [32]	حل تحلیلی	روش فشار گسترده [32] (EP)	روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM)	فشار گسترده	تبدیل دیفرانسیلی
0	0/00	0/00	0/00	0/00	0/00	0/00
0/5	0/00	0/00	0/00	0/0000143	0/00	0/00
1	0/00	0/00	0/00	0/0000533	0/00	0/00
1/5	0/00	0/00	0/00	0/000159	0/00	0/00
2	0/00	0/00	0/00	0/000447	0/00	0/00
2/5	0/00	0/001	0/001	0/00123	0/00	0/00
3	0/00	0/003	0/002	0/003360	-0/001	0/00
3/5	0/00	0/009	0/006	0/009149	-0/003	0/00
4	0/00	0/024	0/019	0/024885	-0/005	0/00
4/5	0/00	0/067	0/056	0/067660	-0/011	0/00
5	0/00	0/183	0/167	0/183934	-0/0016	0/00
5/5	0/5	0/5	0/5	0/5	0/00	0/00
6	1	1	1	1	0/00	0/00
6/5	1/5	1/5	1/5	1/5	0/00	0/00
7	2	2	2	2	0/00	0/00
7/5	2/5	2/5	2/5	2/5	0/00	0/00
8	3	3	3	3	0/00	0/00
8/5	3/5	3/5	3/5	3/5	0/00	0/00
9	4	4	4	4	0/00	0/00
9/5	4/5	4/5	4/5	4/5	0/00	0/00
10	5	5	5	5	0/00	0/00

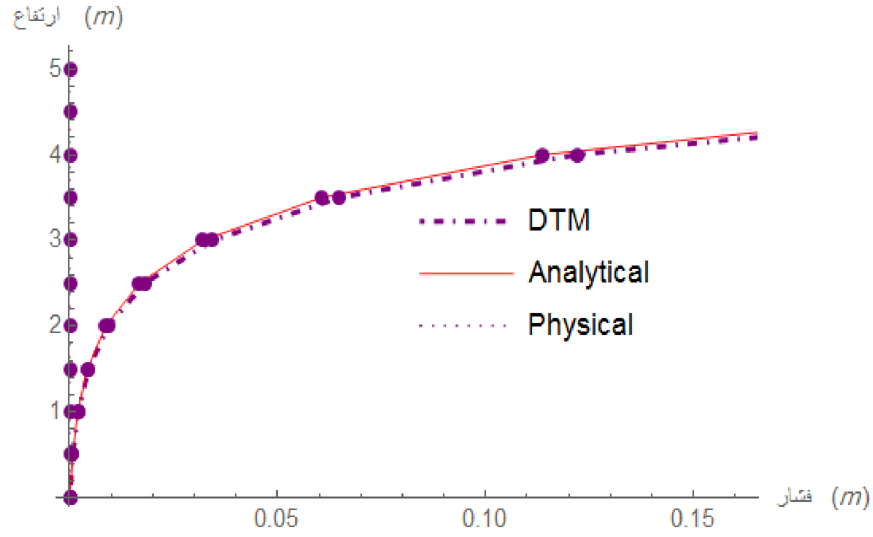
با توجه به مقادیر به دست آمده از جدول (۲)، می‌توان دریافت که روش تبدیل دیفرانسیلی در مقایسه با روش‌های دیگر از دقت قابل قبولی نسبت به روش تحلیلی برخوردار بوده است. البته باید توجه کرد که حل فیزیکی مسئله فوق نسبت به دیگر روش‌ها از دقت پایینی بهره برده و این نکته را باید در نظر گرفت که حل به روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) از حجم کمتری از محاسبات برخوردار است. در ادامه، نتایج عددی به دست آمده از این روش‌ها (جدول۲)، در شکل (۲) ارائه می‌گردد. همچنین با توجه به شکل (۲) (یا مقادیر جدول ۲)، با در نظر گرفتن مقدار هد فشاری بیش از ۰/۵ متر به عنوان هد پایه، می‌توان دریافت که سطح آزاد نشت در فاصله ۵/۵ متری از بالای ستون آب شکل (۱) قرار دارد. این امر از قرار دادن مقادیر معلوم در رابطه (۲۸) نیز قابل محاسبه است.



شکل ۲ مقایسه نتایج به دست آمده از روش تبدیل دیفرانسیلی و روش دیگر در ستون آب یک‌بعدی به ارتفاع ده متر با $\varepsilon = 0.5\text{m}$



شکل ۳ مقایسه نتایج به دست آمده از روش‌های فیزیکی، حل تحلیلی و تبدیل دیفرانسیلی در ستون آب یک بعدی با $\varepsilon = 0.1\text{m}$



شکل ۴ مقایسه نتایج به دست آمده از روش‌های فیزیکی، حل تحلیلی و تبدیل دیفرانسیلی در ستون آب یک بعدی با $\varepsilon = 0.8m$

همان طور که از شکل‌های (۲-۴) پیداست، حل به روش فشار گسترده (EP)، تحلیلی (Analytical) و تبدیل دیفرانسیلی (DTM)، نشان‌دهنده منطقه انتقال آرام بین سطح متخلخل و خشک و سطح مرطوب است در صورتی که این انتقال در حل به روش فیزیکی به صورت شکسته بوده و با توجه به این امر، حل به دو روش فوق، بیانگر محل دقیق سطح آزاد نشت همانند حل به روش فیزیکی نیستند. همچنین می‌توان بیان کرد که با افزایش مقدار ε ، پاسخ‌های روش تبدیل دیفرانسیلی و حل تحلیلی بر یکدیگر بیشتر منطبق می‌گردند.

نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، سعی بر آن شد تا مسئله سطح آزاد نشت در ستون یک‌بعدی آب شامل محیطی متخلخل که معادله حاکم بر آن همان معادله لاپلاس است، به روش تبدیل دیفرانسیلی حل گردد و نتایج آن با روش‌های موجود دیگر مانند حل فیزیکی و حل به روش فشار گسترده مقایسه گردد. برخی از یافته‌های به دست آمده از پژوهش حاضر به شرح زیر می‌باشند:

۱. حل به روش تبدیل دیفرانسیلی قادر به تولید جواب‌هایی بسیار نزدیک به جواب روش‌های فشار گسترده و حل تحلیلی است و این نتایج به خصوص در ستون فوقانی آب، بسیار دقیق‌تر از حل به روش فیزیکی می‌باشند.

۲. حل به روش تبدیل دیفرانسیلی که بر پایه بسط سری تیلور تابع می‌باشد، از حجم محاسبات کمتری نسبت به روش فشار گسترده و روش تحلیلی برخوردار است و همین مزیتی است تا از بروز اشتباهات محاسباتی در طولانی شدن روند محاسبات پیچیده جلوگیری گردد.

۳. روش‌های فشار گسترده و تبدیل دیفرانسیلی و همچنین روش تحلیلی، دارای ناحیه انتقالی آرام بین محیط خشک و متخلخل و محیط مرطوب می‌باشند که این امر در مورد روش فیزیکی، به صورت ناحیه شکسته و ناگهانی می‌باشد. همین موضوع باعث می‌شود که محل دقیق سطح آزاد نشت، در روش فیزیکی، به نسبت دیگر روش‌های بیان شده، آشکارتر گردد و بتوان آن را راحت‌تر تشخیص داد.

فهرست علائم

P	هد فشاری، m
y	ارتفاع، m
ε	هد پایه، m

پیوست: حل تحلیلی ستون آب یک‌بعدی

برای اثبات درستی حل به روش DTM، و مقایسه نتایج آن، در این بخش به حل تحلیلی مسئله نشت در ستون یک‌بعدی آب پرداخته‌ایم. از بخش اول معادله (۵) شروع کرده و داریم:

$$\frac{d^2 p_1}{dy^2}-\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{dp_1}{dy}=0 \tag{۳۰}$$

معادله دیفرانسیل معمولی فوق، یک معادله خطی همگن با ضرایب ثابت مرتبه دو با جواب عمومی $p=Ae^{\lambda y}$ است. با جای‌گذاری این پاسخ در معادله (۳۰) داریم:

$$Ae^{\lambda y}(\lambda^2-\frac{1}{\varepsilon}\lambda)=0 \tag{۳۱}$$

بدیهی است بخش اول نمی‌تواند صفر باشد. بنابراین با صفر قراردادن پرانتز، دو جواب $\lambda=0$, $\lambda=1/\varepsilon$ به دست خواهد آمد. یعنی:

$$p_1=c_1e^{0y}+c_2e^{\frac{1}{\varepsilon}y} \tag{۳۲}$$

معادله دوم (۵) با دو بار انتگرال‌گیری مستقیم حل می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$p_2=c_3y+c_4 \tag{۳۳}$$

هنگامی که $y=d$ باشد، که d خود مقداری نامعین در محل اشتراک دو مرز p_1 و p_2 یعنی $p=\varepsilon$ است و باید از پیوستگی توابع d در y=d به دست آید، می‌توان معادلات به دست آمده برای مقادیر p_1 و p_2 را به صورت زیر نوشت:

$$p_1=c_3d+c_4=\varepsilon \tag{۳۴}$$

$$p_2=c_1+c_2e^{\frac{d}{\varepsilon}}=\varepsilon \tag{۳۵}$$

در محل پیوستگی مرز که بیان می‌کند $p=\varepsilon$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial p_1}{\partial y}=\frac{\partial p_2}{\partial y} \tag{۳۶}$$

با اعمال شرط فوق یعنی مشتق‌گیری مرتبه اول از معادلات (۳۴– ۳۵) نسبت به y و برابر قراردادن آن‌ها خواهیم داشت:

$$c_3=\frac{1}{\varepsilon}c_2e^{\frac{y}{\varepsilon}} \tag{۳۷}$$

از معادله (۵) داریم که اگر $y=0$ باشد آن‌گاه $p=0$ می‌باشد، پس با قراردادن شرط فوق در معادله p_1 خواهیم داشت:

$$c_1+c_2=0 \tag{۳۸}$$

هم‌چنین دوباره از معادله (۵) داریم که اگر $y=h$ در نظر گرفته شود آن‌گاه $p=p^*$ می‌باشد، پس با قرار دادن شرط فوق در معادله p_2 خواهیم داشت:

$$p^*=c_3h+c_4 \tag{۳۹}$$

با توجه به معادلاتی که برای ضرایب c_1 تا c_4 به دست آمده، به طور خلاصه می‌توانیم بنویسیم که:

$$\begin{aligned} c_3&=(\frac{1}{\varepsilon}e^{\frac{d}{\varepsilon}})c_2\\ c_1&=-c_2\\ c_4&=p^*-c_3h=p^*-\frac{h}{\varepsilon}e^{\frac{d}{\varepsilon}}c_2 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

با جای‌گذاری ضرایب به دست آمده در روابط (۳۵) و (۳۴) همان طور که می‌بینیم، همه برحسب c_2 به د ست آمده و می‌توانیم بنویسیم که:

$$c_1+c_2e^{\frac{d}{\varepsilon}}=\varepsilon \xrightarrow{c_1=-c_2} c_2(e^{\frac{d}{\varepsilon}}-1)=\varepsilon \tag{۴۱}$$

در نتیجه:

$$c_2=\frac{\varepsilon}{(e^{\frac{d}{\varepsilon}}-1)} \tag{۴۲}$$

با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده از رابطه (۴۰) برای c_3,c_4 در رابطه (۳۴) می‌توانیم رابطه زیر را به دست آوریم:

$$c_2e^{\frac{d}{\varepsilon}}=(\frac{d}{\varepsilon}-\frac{h}{\varepsilon})+p^*=\varepsilon \tag{۴۳}$$

با توجه به این معادله و همچنین معادلات به دست آمده برای ضرایب c و ارتباط بین آن‌ها طبق رابطه (۴۰)، می‌توان هر ضریب c_1 تا c_4 را به طور مستقل، همانند زیر به دست آورد:

$$c_1=-\frac{\varepsilon}{\left(e^{\frac{d}{\varepsilon}}-1\right)};c_2=\frac{\varepsilon}{\left(e^{\frac{d}{\varepsilon}}-1\right)};$$

$$c_3=\frac{e^{\frac{d}{\varepsilon}}}{\left(e^{\frac{d}{\varepsilon}}-1\right)};c_4=p^*-\frac{he^{\frac{d}{\varepsilon}}}{(e^{\frac{d}{\varepsilon}}-1)} \tag{۴۴}$$

سپس با جای‌گذاری ضرایب به دست آمده از رابطه (۴۴) در معادله (۴۳) و همچنین تقسیم طرف راست بر ε و ساده‌سازی آن به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{\varepsilon}-\frac{h}{\varepsilon}=(1-\frac{p^*}{\varepsilon})(1-e^{-\frac{d}{\varepsilon}}) \quad (۴۵)$$

همان طور که مشاهده گردید، با استفاده از حل تحلیلی، مقدار d که در ابتدا نامعلوم بود و فقط می‌دانستیم که در محل مرز مشترک p_1 و p_2 است، طبق رابطه (۴۵) به دست آمد. با توجه به اینکه در رابطه (۴۵)، طبق فرضیات مسئله شکل (۱)، مقادیر h, ε, p^* معلوم هستند، با جای‌گذاری آن‌ها می‌توان به مقدار مجهول d دست یافت. همچنین تمامی ثوابت مجهول موجود در پاسخ و توابع مجهول فشار در هر دو بخش شکل (۱) به دست آمدند.

سپاسگزاری

مراجع

[1] USACE. Seepage analysis and control for dams. (1993)

[2] M. Baudin, C. Berthon, F. Coquel, M. Roland, “A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law,” *Numerische Mathematik*, vol. 99, no. 3, pp. 411-440, (2005).

[3] S. S. Motsa, P. G. Dlamini and M. Khumalo, “Spectral relaxation method and spectral quasilinearization method for solving unsteady boundary layer flow problems.” *Advances in Mathematical Physics*, (2014).

[4] M. T. Ayvaz, M. Tuncan, H. Karahan, A. Tuncan, “An extended pressure application for transient seepage problems with a free surface,” *Journal of Porous Media*, vol. 8, no. 6, pp. 613-625 (2005).

[5] Southwell, R. V. Relaxation methods. (1946).

[6] F. Coquel, E. Goquel. B. Perthame. A. In, P. Rascle, “Some new Godunov and relaxation methods for two-phase flow problems,” *Godunov Methods, Springer*, vol. 1, pp. 179-188, (2001).

[7] Harr, M. E. Groundwater and seepage. Courier Corporation. (2012).

[8] K. J. Bathe, M. R. Khoshgoftaar, M. R, “Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 3, no, 1, pp. 13-22, (1979).

[9] M. H. Bazyar, A. Graili, “A practical and efficient numerical scheme for the analysis of steady state unconfined seepage flows,” *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 36, no. 16, pp. 1793-1812, (2012).

[10] K. Chaiyo, P. Rattanadecho, S. Chantasiriwan, “The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 38, no. 2, pp. 249-254, (2011).

[11] J. T. Chen, C. C. Hsiao, Y. P.Chiu, Y. T. Lee, “Study of free-surface seepage problems using hypersingular equations,” *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 23, no. 8, pp. 755-769, (2007).

[12] A. Cividini and G. Giancarlo, “Finite-element approach to the erosion and transport of fine particles in granular soils,” *International Journal of Geomechanics*. vol. 4, no. 3, pp. 191-198, (2004).

[13] Fengzhi, L. Scaled Boundary Finite-element Method for Seepage Free Surfaces Analysis [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 5 (2009).

[14] M. I. Herreros, M, Mabssout, M. Pastor, "Application of level-set approach to moving interfaces and free surface problems in flow through porous media," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 195, no, 1-3, pp. 1-25, (2006).

[15] M. J. Kazemzadeh-Parsi, F. Daneshmand, "Three dimensional smoothed fixed grid finite element method for the solution of unconfined seepage problems," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 64, pp. 24-35, (2013).

[16] M. J. Kazemzadeh-Parsi, F. Daneshmand, "Unconfined seepage analysis in earth dams using smoothed fixed grid finite element method," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 36, no. 6, pp. 780-797, (2012).

[17] S. S. Athani, Shivamanth, C. H. Solanki, G. R. Dodagoudar, "Seepage and stability analyses of earth dam using finite element method," *Aquatic Procedia*, vol. 4, pp. 876-883, (2015).

[18] G. Li, J. Ge, J, Y. Jie, "Free surface seepage analysis based on the element-free method,". *Journal of Tsinghua University (Science and Technology) ((Mechanics research communications))*, p. 11, (2002).

[19] M. Bazyar, A. Talebi, "Transient seepage analysis in zoned anisotropic soils based on the scaled boundary finite-element method," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 39, no. 1, pp. 1-22, (2015).

[20] Y. Jie, G. Jie, Z. Mao, G. Li, "Seepage analysis based on boundary-fitted coordinate transformation method," *Computers and Geotechnics*, vol. 31, no. 4, pp. 279-283, (2004).

[21] J. Zhang, Q. Xu, Z. Chen, "Seepage analysis based on the unified unsaturated soil theory," *Mechanics Research Communications*, vol. 28, no. 1, pp. 107-112, (2001).

[22] H. Zheng, H. C. Dai, D. F. Liu, "A variational inequality formulation for unconfined seepage problems in porous media," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 33, no. 1, pp. 437-450, (2009).

[23] K. Chaiyo, P. Rattanadecho, S. Chantasiriwan, "The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 38, no. 2, pp. 249-254, (2011).

[24] M, Li., Diao, N-r. Diao, Z-H. Fang, Analysis of seepage flow in a confined aquifer with a standing column well, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, vol. 19, no. 1, pp. 84-91, (2007).

[25] A. Leontiev, W. Huacasi, "Mathematical programming approach for unconfined seepage flow problem," *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 25, no. 1, pp. 49-56, (2001).

[26] A. Naji, D. Ouazar, D, A. H. D. Cheng, "Locating the saltwater-freshwater interface using nonlinear programming and h-adaptive BEM," *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 21, no. 3, pp. 253-259, (1998).

[27] J. K. Zhou, "Differential transformation and its applications for electrical circuits," In: China, Wuhan, Huazhong University Press, (1986).

[28] S. H. Ho, C. K. Chen, "Analysis of general elastically end restrained non-uniform beams using differential transform," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 22, no. 4-), pp. 219-234, (1998).

[29] C. K. Chen, S. H. Ho, "Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method," *Applied Mathematics and computation*, vol. 106, no. 2-3, pp. 171-179, (1999).

[30] F. Ayaz, "On the two-dimensional differential transform method," *Applied Mathematics and computation*, vol. 143, no. 2-3, pp. 361-374, (2003).

[31] F, Ayaz., "Solutions of the system of differential equations by differential transform method," *Applied Mathematics and computation*, vol. 147, no. 2, pp. 547-567, (2004).

[32] J.-P. Bardet, T. Tobita, "A practical method for solving free-surface seepage problems," *Computers and Geotechnics*, vol. 29, no. 6, pp. 451-475, (2002).